Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλες τις τετράδες πρώτων αριθμών (p, q, r, k) όπου οι αριθμοί:

$$A = \frac{2031 + q}{3p} \qquad B = \frac{r^3 + 4}{5k - 3} \qquad \Gamma = \frac{p + 1}{r}$$

είναι όλοι ακέραιοι.

Πρόβλημα 2. Δίνεται μία ακολουθία (α_ν) που ορίζεται ως:

$$\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} \cdot \alpha_\nu + 3\nu \qquad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

Αν $\alpha_1 = 2 \; και \; \alpha_2 = 3$,να δείξετε ότι $\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + \alpha_{\kappa+2} + \alpha_{\kappa+3} \neq m^2$ για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς m και κ.

Πρόβλημα 3. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί x και y όπου $x, y > 0$.

(α) Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2y} + \sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x+3y} + \sqrt{x+2y}} < \sqrt{\frac{3}{y}}$$

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} + \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}} + \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{48}}} + \frac{1}{\sqrt{9+\sqrt{80}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{47+\sqrt{2208}}}$$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{n^n}{\sqrt{4+\sqrt{12}}} + \frac{n^n}{\sqrt{8+\sqrt{60}}} + \frac{n^n}{\sqrt{12+\sqrt{140}}} + \cdots + \frac{n^n}{\sqrt{52+\sqrt{2700}}} = \sqrt{108} - 2$$

Πρόβλημα 4. Σε κάθε κορυφή ενός κανονικού 100-γώνου μπαίνει ένας αριθμός από το 1 μέχρι το 100 έτσι ώστε οι αριθμοί που βρίσκονται σε οποιεσδήποτε δύο διαδοχικές κορυφές , να διαφέρουν κατά 1. Επίσης κάθε μία κορυφή του 100-γώνου χρωματίζεται με ακριβώς ένα από τα χρώματα μπλε, κίτρινο, πράσινο και μωβ.

(α) Να βρείτε την πιθανότητα μία διαγώνιος του 100-γώνου να συνδέει δύο κορυφές όπου το άθροισμα των αριθμών που είναι αναγραμμένοι πάνω τους να είναι περιττό.

(β) Να βρείτε την πιθανότητα να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

- « Καμία κορυφή όπου ο αριθμός που είναι γραμμένος πάνω της είναι πρώτος αριθμός, δεν είναι χρωματισμένη μπλε».
- «Καμία κορυφή όπου ο διψήφιος αριθμός που είναι αναγραμμένος πάνω της που έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με κάποιο τέλειο τετράγωνο δεν είναι χρωματισμένη κίτρινη».
- «Το πολύ μία κορυφή, είναι χρωματισμένη πράσινη».