ΛΥΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων αριθμών (a, b, c) που είναι τέτοιες ώστε:

$$(c^2+1)(a^3-b^3)=12bc$$

Λύση:

Αρχικά καταλαβαίνουμε ότι:

$$(c-1)^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow c^2-2c+1 \geq 0$$
$$\Rightarrow c^2+1 \geq 2c$$

Έτσι δημιουργούμε την ανισότητα:

$$2c \cdot (a^3-b^3) \leq 12bc$$
$$\Rightarrow a^3-b^3 \leq 6b$$

Υποθέτουμε ότι $a > b$. Η ελάχιστη τιμή του a^3-b^3 συναρτήσει του b θα είναι όταν $a=b+1$

Έτσι:

$$a^3-b^3=(b+1)^3-b^3$$

$$=b^3+3b^2+3b+1-b^3$$

$$=3b^2+3b+1$$

Με την χρήση της ανισότητας $AM-GM$ θα πάρουμε ότι:

$$3b^2+3b+1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{9} \cdot b$$

Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι:

$$3 \cdot \sqrt[3]{9} \cdot b > 6b$$

Άρα ακόμα και με την ελάχιστη θετική τιμή του A' μέλους το 'A' $μέλος$ θα είναι μεγαλύτερο από το B' $μέλος$. Έτσι η μοναδική λύση θα είναι όταν μηδενίσουμε τα δύο μέλη.

- Προφανώς $c^2+1>0$ έτσι παίρνουμε ότι $a=b$. Για να ισούται το B' μέλος με 0 πρέπει ή $a=b=0$ ή $c=0$.

Οι λύσεις είναι:

$$(a, b, c)=(0,0, x) \; και \; (a, b, c)=(y, y, 0)$$

Όπου x , y μη αρνητικοί ακέραιοι.