Α' Λυκείου

ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΣ: ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΓΙΩΡΚΑΣ

Οδηγίες:

- **Το γραπτό αποτελείται από 6 θέματα.**
- **Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.**
- **Ο χρόνος είναι 40 λεπτά.**
- **Δεν προλαβαίνετε να λύσετε όλο το γραπτό!**
- **Επιλέξετε τα δύο ευκολότερα θέματα από τα έξι και αν λυθούν και τα δύο θα πάρετε «*full marks*».Δηλαδή η μέγιστη βαθμολογία είναι 20 μονάδες.**

Πρόβλημα 1. Να βρείτε όλες τις τετράδες πρώτων αριθμών (p, q, r, k) όπου οι αριθμοί:

$$A = \frac{2031 + q}{3p} \qquad B = \frac{r^3 + 4}{5k - 3} \qquad C = \frac{p + 1}{r}$$

είναι όλοι ακέραιοι.

Πρόβλημα 2. Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς (a, b, c) με $a + b + c = 3$. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{ab + abc + a + b} + \sqrt{bc + abc + b + c} + \sqrt{ac + abc + a + c} \leq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Πρόβλημα 3. Η τράπεζα της Κύπρου εκδίδει κάποια νομίσματα όπου στην μία πλευρά τους έχουν γραμμένο ένα θετικό ακέραιο αριθμό, και πάνω στην άλλη πλευρά τους έχουν γραμμένο ένα άλλο θετικό ακέραιο αριθμό ο οποίος είναι πολλαπλάσιος του άλλου. Όλα τα νομίσματα είναι ίδια. Ο Σόλωνας παίρνει 30 από αυτά τα νομίσματα και τα τοποθετεί πάνω στο τραπέζι έτσι ώστε σε κάθε νόμισμα πάνω στο τραπέζι, να φαίνεται μόνο η μία πλευρά του. Το άθροισμα όλων των αριθμών που βλέπει τώρα ο Σόλωνας στο τραπέζι είναι 2017. Να βρείτε τους αριθμούς που είναι γραμμένοι στις πλευρές των νομισμάτων.

Πρόβλημα 4. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ περιμέτρου $1cm$.Έστω C_1 ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΒΓ$.Δίνεται επίσης το εγγεγραμμένο ορθογώνιο $ΔΕΖΗ$ του κύκλου C_1 με το μήκος του να είναι διπλάσιο του πλάτους του $ΔΕ > ΕΖ$.Από το $Ε$ φέρουμε κάθετη $ΕΙ$ πάνω στην διαγώνιο $ΔΖ$. Από το $Ι$ φέρουμε κάθετη $ΙΚ$ πάνω στην $ΔΕ$. Έστω C_2 ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΕΙΚ$. Να βρείτε τον λόγο των ακτινών των κύκλων C_1 και C_2.

Πρόβλημα 5. Δίνεται μία ακολουθία (α_ν) που ορίζεται ως:

$$\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}\alpha_\nu + 3\nu \qquad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

Αν $\alpha_1 = 2 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha_2 = 3$,να δείξετε ότι $\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + \alpha_{\kappa+2} + \alpha_{\kappa+3} \neq m^2$ για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς m και κ.

Πρόβλημα 6. Σε ένα κανονικό P −γώνο (P Θετικός ακέραιος, $P \geq 5$) σε κάθε κορυφή γράφουμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό από το 1 μέχρι το P ώστε οι αριθμοί σε κάθε δύο διαδοχικές κορυφές να διαφέρουν κατά 1 και να μην υπάρχουν δύο κορυφές που να έχουν γραμμένο τον ίδιο αριθμό. Συμβολίζουμε ως $P(A)$ την πιθανότητα μία διαγώνιος του P-γώνου να συνδέει δύο κορυφές όπου το άθροισμα των αριθμών που είναι αναγραμμένοι πάνω τους να είναι άρτιο. Συμβολίζουμε ως $P(B)$ την πιθανότητα μία διαγώνιος του P-γώνου να συνδέει δύο κορυφές όπου το άθροισμα των αριθμών που είναι αναγραμμένοι πάνω τους να είναι περιττό. Να υπολογίσετε το $P(A) - P(B)$ συναρτήσει του P.

Πρόβλημα 1. Θεωρία αριθμών / Δυσκολία : 9/10
Πρόβλημα 2. Άλγεβρα / Δυσκολία: 10/10
Πρόβλημα 3. Συνδυαστική / Δυσκολία: 7/10
Πρόβλημα 4. Γεωμετρία / Δυσκολία: 9/10
Πρόβλημα 5. Θεωρία αριθμών / Δυσκολία 8/10
Πρόβλημα 6. Συνδυαστική/ Δυσκολία 10/10